

Problema 3 <yinyang>

Descriere a unei/unor soluții posibile

Structurile de date utilizate: matrici

Gradul de dificultate: 2

Soluție – 90 puncte – Complexitate $O(N^3)$

(sursa: yinyang90.cpp)

O primă observație este că dacă avem 2 elemente X și Y aflate pe aceeași linie sau aceeași coloană, indiferent ce operații aplicăm asupra matricei, cele 2 elemente vor rămâne pe aceeași linie sau coloană.

Astfel, putem deduce că trebuie să existe o relație de ordine între liniile și coloanele matricei. Mai exact, pentru oricare două linii $L1$ și $L2$ din matrice, avem $A[L1][x] \leq A[L2][x]$ pentru orice coloană x de la 1 la M , sau avem $A[L2][x] \leq A[L1][x]$ pentru orice coloană x de la 1 la M . Indiferent de operațiile pe coloane pe care le aplicăm, relațiile între elementele de pe aceeași coloană din cele două linii nu se vor schimba. În concluzie, putem spune că linia cu elementele mai mici este “mai mică” și aceasta trebuie să apară înaintea liniei “mai mari” în matrice. Presupunem fără a restrânge generalitatea problemei că linia $L1$ este “mai mică” decât linia $L2$. Dacă $L1$ apare după linia $L2$, atunci spunem că aceste linii formează o inversiune, inversiune care trebuie să fie rezolvată la un moment dat printr-o operație de interschimbare între linii. Analog pentru coloane.

În concluzie, rămâne de aflat care este numărul de inversiuni atât pentru linii, cât și pentru coloane în matrice. Din moment ce restricțiile sunt foarte mici, putem fixa pe rând fiecare pereche de linii $L1$ și $L2$ (cu $L1 < L2$). Dacă linia $L1$ este “mai mare” decât linia $L2$, liniile prezintă o inversiune. Dacă $L1$ este linia “mai mică”, nu este nevoie de nici o operație.

Dacă există două linii $L1$ și $L2$ care nu se află în relație de ordine (nu putem spune că $L1$ este “mai mică” sau “mai mare” decât $L2$), atunci nu avem soluție. Formal, nu avem soluție dacă și numai dacă există două linii $L1$ și $L2$ diferite și două coloane diferite X și Y pentru care avem $A[L1][X] < A[L2][X]$ și $A[L1][Y] > A[L2][Y]$.

Din moment ce fixăm fiecare pereche de linii/coloane, iar verificarea condiției de existență este $O(N)$, complexitatea finală va fi $O(N^3)$.