Teoria jocurilor: numerele Sprague Grundy

Cosmin-Silvestru Negrușeri

Domeniu relativ nou și încă necercetat în adâncime, teoria jocurilor este o ramură a matematicii în care de multe ori primează inventivitatea și nu cunoștințele. Tocmai din acest motiv, în cadrul acestui articol vom introduce câteva noțiuni teoretice care ne vor ajuta în rezolvarea uner probleme din teoria jocurilor.

Ingeniozitatea celor pasionați poate fi testată prin introducerea unor probleme de teoria jocurilor la concursurile de matematică și informatică.

Deoarece în *România*, *teoria jocurilor* nu este studiată în școli, problemele din acest domeniu pot pune în dificultate concurenții.

NIM

Pentru început ne vom familiariza cu jocul clasic ***NIM***:

Se consideră n grămezi de pietre. Doi jucători, vor ridica (alternativ) oricâte pietre dintr-o singură grămadă. Câștigătorul este cel care ia ultima piatră.

Pentru cazul trivial în care numărul de grămezi este egal cu 1, primul jucator are evident strategie de câștig, el putând lua toate pietrele din grămadă.

Dacă numărul de grămezi este egal cu 2, primul jucător are strategie de câștig atunci când numărul de pietre din prima grămadă este diferit de numărul de pietre din cea de-a doua, strategia lui fiind cea de a aduce tot timpul grămada mai mare la numărul de pietre al grămezii mai mici, și cum jocul este finit, înseamnă că primul jucător o să aducă jocul în starea (0, 0).

Dacă numărul de grămezi este mai mare decât doi strategia se complică și nu se mai observă cu "ochiul liber". Stările câștigătoare pentru mai multe grămezi sunt acele stări pentru care suma *XOR* a numerelor de pietre din grămezi este diferită de 0, restul stărilor fiind de pierdere.

De exemplu, dacă avem o gramadă cu o piatră, o gramadă cu trei pietre, o gramadă cu cinci pietre și o gramadă cu șapte pietre:

```
     o
   ooo
 ooooo
oooooo
```

atunci vom avea:

$1 = (0001)_2$

$3 = (0011)_2$

$5 = (0101)_2$

$7 = (0111)_2$

efectuând *XOR* (operatorul ^ în *C/C++*) între reprezentările binare ale numerelor obținem $0 = (0000)_2$.

Conform propoziției de mai sus această stare este de pierdere.

Să demonstrăm cele afirmate.

Dintr-o poziție cu suma *XOR* egală cu 0, pentru orice mutare ajungem evident la o poziție cu suma *XOR* diferită de 0, pentru că luând dintr-o grămadă un număr *x* de pietre, în suma *XOR* corespunzătoare noii stări bitul cel mai semnificativ al lui *x* va avea valoarea 1.

Mai rămâne de demonstrat că din orice poziție cu suma *XOR* diferită de 0 putem trece printr-o mutare convenabilă într-o poziție cu suma *XOR* egală cu 0.

Căutăm o grămadă care are un număr de pietre mai mare sau egal cu cea mai mare putere a lui 2 care apare în suma *XOR*. Fie *x* valoarea sumei *XOR* a tuturor grămezilor și *y* numărul de pietre din grămada găsită mai devreme. O mutare "câștigătoare" este extragerea din grămada găsită care are *y* pietre a *y* - (*x XOR y*) pietre (*x XOR y* este mai mic decât y pentru că se anulează biții cei mai semnificativi ai lui y și x). Atunci noua sumă *XOR* va fi egală cu 0.

De exemplu: $4 \wedge 8 \wedge 17 = (00100)_2 \wedge (01000)_2 \wedge (10001)_2 = (11101)_2 = 29$

Mutarea câștigătoare constă în a lua din cea de-a treia gramadă un numă de pietre egal cu:

$17 - (17 \wedge 29) = 17 - 17 \wedge 29 = 5 = (00101)_2$.

După acest pas grămezile vor avea 4, 8, 12 pietre. Ne aflăm astfel într-o stare cu suma *XOR* egală cu 0.

Exemplificăm în continuare câteva probleme în care se folosește strategia de la jocul *NIM*.

Problema 1

Pe o tablă de șah, care are $n \cdot m$ căsuțe, sunt plasați pe prima linie n pioni albi și pe ultima linie n pioni negri. Fiecare dintre cei doi jucători poate muta un singur pion, care îi aparține, un număr strict pozitiv de căsuțe în sus sau în jos, astfel încât să nu ajungă vreun pion alb să fie mai jos decât pionul negru de pe aceeași coloană. Pierde jucătorul care nu mai poate muta.

Această problemă este o deghizare a jocului *NIM*, numărul de pătrățele libere între pionul alb și pionul negru de pe coloana i putând fi considerat numărul de pietre din grămada i.

Singura diferență este că se pot adăuga pietre la grămadă (existând posibilitatea mutării înapoi).

Această problemă se rezolvă ușor, jucătorul care are strategie de câștig putând evita asemenea mutări. O astfel de mutare poate fi utilă numai pentru jucătorul care este într-o poziție de pierdere.

Când jucatorul care nu are strategie de câștig mută înapoi x casuțe, celălalt jucător va muta pionul propriu de pe aceeași coloană cu x căsuțe în față, astfel ajungându-se la aceeași stare cu cea existentă cu două mutări anterior (considerând diferența pozițiilor).

Problema 2

Această problemă a fost propusă spre rezolvare participanților la barajul pentru lărgirea lotului național din 1997.

Pe o linie sunt plasate la coordonate întregi $2 \cdot n$ piese roșii și albastre.

Fiecare piesă roșie poate fi mutată în dreapta oricâte poziții astfel încât să nu sară peste o piesă albastră, iar piesele albastre pot fi mutate oricâte poziții la stânga astfel încât să nu depășească vreo piesă roșie. Piesele vor alterna: roșu, albastru, roșu, albastru etc. Pierde jucătorul care nu mai poate muta.

Această problemă poate fi, de asemenea, redusă la jocul *NIM*. Diferențele pozițiilor perechilor de piese roșii și albastre consecutive constituie numărul de pietre al grămezilor din jocul *NIM*.

Problema 3

(*El Judge MIPT online programming contest Nim Game Give Away*!)

Se consideră n grămezi de pietre, jucătorii mută alternativ, fiecare jucător extrăgând oricâte pietre dintr-o singură grămadă. Cel care ia ultima piatră pierde jocul.

Strategia acestui joc este similară cu cea aplicată în jocul *NIM* cu câteva mici diferențe.

Jucătorul care are strategie de câștig în poziția curentă în cadrul jocului *NIM* face aceeași mutare pe care ar face-o în cazul jocului *NIM*, exceptând cazul în care această mutare lasă doar grămezi cu o singură piatră și numărul acestor grămezi este par. În această situație, dacă ar trebui să ia x pietre, jucătorul poate lua x - 1 pietre din grămada actuală, pentru ca numărul de grămezi să fie impar și el să facă ultima mutare.

Numerele Sprague Grundy

Jocurile care prezintă interes pentru jucători sunt acelea care necesită examinarea unui număr foarte mare de stări pentru determinarea strategiei de câștig, deoarece în caz contrar câștigătorul s-ar cunoaște chiar de la început. Spre deosebire de aceștia, matematicienii sau informaticienii sunt interesați de determinarea unor strategii pentru astfel de jocuri.

Toate jocurile imparțiale cu doi jucători cu informație totală pot fi reduse la jocul *NIM* care se joacă cu niște grămezi virtuale, în care mutările posibile sunt extragerea oricâtor pietre dintr-o grămadă sau adăugarea oricâtor pietre la o grămadă (așa cum am menționat anterior, adăugarea de pietre la o grămadă nu complică analiza jocului).

Afirmația anterioară constituie un rezultat al *Teoriei Sprague-Grundy*. ***Roland Percival Sprague*** (1936) și ***Patrick Michael Grundy*** (1939) sunt doi matematicieni care s-au ocupat, independent, de teoria jocurilor imparțiale.

Majoritatea jocurilor imparțiale se pot reduce la jocul prezentat în problema *Pioni* de la runda 47 a concursului de programare *Bursele Agora*. Acolo se menționa următorul joc: *Se consideră un graf aciclic care conține în noduri câțiva pioni, jucătorii alternează la mutare și fiecare poate muta câte un pion pe un arc care iese din nodul în care este situat pionul. Pierde jucătorul care nu poate muta.*

Cum graful este aciclic, jocul este finit și are întotdeauna un câștigător. Practic, acest joc este suma unor jocuri, mai precis suma a mai multor jocuri cu un singur pion pe graful aciclic.

Jocul cu un singur pion poate fi analizat destul de ușor, fiecare nod al grafului putând fi colorat cu alb sau negru după cum există sau nu strategie de câștig dacă în nodul curent ar fi poziționat pionul. Această colorare poate fi realizată ușor dacă se pornește de la nodurile fără urmaș și la fiecare pas se colorează câte un nod ai cărui urmași sunt deja colorați.

Orice joc imparțial poate fi redus la un joc cu un singur pion. Nodurile sunt pozițiile jocului și arcele grafului sunt mutările posibile din fiecare poziție. Jocul inițial poate fi și el transformat, dar numărul de noduri crește foarte mult (pentru n pioni și m noduri, numărul de noduri din jocul transformat este n^m) și nu este practic să colorăm graful rezultat. Folosind teoria dezvoltată de *Sprague* și *Grundy*, putem reduce complexitatea analizei jocului cu n pioni la complexitatea analizei jocului cu un pion.

Vom introduce funcția *mex* cu semnificația: $mex(S)$ este elementul minimal natural care nu aparține mulțimii S. Pentru fiecare nod x al grafului aciclic considerat, vom calcula valoarea funcției $gx = mex(gx_1, gx_2, \ldots, gx_k)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sunt urmașii nodului x în graf. Pentru nodurile fără urmași $gx = 0$.

Analog jocului cu un singur pion, graful poate fi etichetat din aproape în aproape, pornind de la nodurile fără urmași.

Observăm că, dacă $gx = 0$ în jocul cu un singur pion situat în nodul x nu avem strategie de câștig, iar dacă gx este diferit de 0 avem strategie de câștig. Restul informației ne ajută la determinarea unei strategii pentru jocul cu n pioni.

Observăm că putem reduce acest joc la jocul *NIM* în care grămada virtuală asociată pionului i are un număr de pietre egal cu valoarea g a nodului în care este situat pionul i.

De ce este acest joc echivalent cu jocul NIM?

Așa cum la *NIM* puteam lua oricâte pietre dintr-o grămadă, aici putem muta pionul dintr-un nod cu valoarea g într-un nod astfel încât noua valoare pentru pionul i poate fi orice număr de la 0 la $g - 1$. Prin urmare, pentru a verifica dacă suntem într-o poziție de câștig în jocul cu pionii, putem aplica strategia jocului *NIM* și obținem că suntem într-o poziție de câștig dacă suma *XOR* a numerelor din nodurile ocupate de cei n pioni este diferită de 0. Această sumă se numește funcția *Sprague Grundy*, $SG(i_1, \ldots, i_n) = gi_1 \wedge gi_2 \wedge gi_3 \wedge \ldots \wedge gi_n$.

Problema de la runda 47 se rezolvă acum ușor efectuând o sortare topologică a nodurilor grafului aciclic și numerotând nodurile folosind funcția *mex*.

Să studiem acum alte probleme care se pot rezolva folosind numerele *Sprague Grundy*.

Problema 4

Problema *Joc* a rundei 13 a concursului de programare *Bursele Agora* putea fi rezolvată în acest mod.

În acea problemă se cerea să verificăm existența unei strategii de câștig pentru un joc similar cu *NIM* în care se putea lua dintr-o grămadă o piatră sau un număr prim de pietre.

Dacă determinăm valorile *Sprague Grundy* pentru grămezi de dimensiuni mici putem observa că se repeta o succesiune de numere: 0 1 2 3 0 1 2 3 …

Putem demonstra prin inducție că această secvență se va repeta la nesfârșit.

Pentru o grămadă de dimensiune n valoarea asociată va fi n modulo 4.

Pentru $0 \le n \le 3$ afirmația este adevărată.

Vom presupune afirmația adevărată pentru toate valorile $m < n$. Să demonstrăm acum că este adevărată și pentru n.

Deoarece putem lua din n pietre una, două sau trei pietre, mai rămâne valoarea n modulo 4 care nu este eliminată încă din valorile potențiale asociate grămezii de dimensiune n.

Vom arăta în continuare că această valoare nici nu va fi eliminată. Eliminarea ei ar însemna că putem lua din n un număr p de pietre și atunci din $(n - p)$ modulo 4 = n modulo 4, am avea: p modulo 4 = 0, dar p este un număr prim, deci valoarea *Sprague Grundy* asociată unei grămezi de dimensiune n este n modulo 4.

Problema 5

(*El Judge MIPT online programming contest, Stone game*)

Se consideră k grămezi cu $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pietre fiecare. Când este rândul său, un jucător poate lua dintr-o gramadă 2^m pietre. Jucătorul care ia ultima piatră câștigă.
Restricții: $k \le 50$, $n_i \le 10^{200}$.

Să determinăm valorile *Sprague Grundy* pentru grămezi mici:

0 : 0; 1 : 1; 2 : 2; 3 : 0; 4 : 1; 5 : 2; 6 : 0

Observăm și aici secvența repetitivă 0 1 2 0 1 2, deci am putea trage concluzia că valoarea *Sprague Grundy* asociată unei grămezi de dimensiune n este n modulo 3. Această afirmație este adevarată și urmează aceeași demonstrație ca în cazul problemei anterioare, iar restul modulo 3 pentru un număr cu 200 de cifre este simplu de găsit determinând suma cifrelor numărului.

Problema 6

(*El Judge MIPT online programming contest, Stone game II*)

Se consideră k grămezi de pietre cu $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pietre. Un jucător poate lua dintr-o grămadă la mutarea lui un număr pozitiv de pietre dar nu mai mult de jumătate din pietrele din grămadă. Jucătorul care nu mai poate muta pierde.
Restricții: $k \le 50$, $n_i \le 100000$.

Numărul 100000 nu este foarte mare și valorile *Sprague Grundy* pot fi determinate *off-line* și incluse în programul nostru ca și constante.

Putem scrie pentru valori mici secvența *Sprague Grundy*:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	2	1	3	0	4	2	5	1	6	3	7

Pentru n impar valoarea asociată este aceeași cu valoarea asociată lui $n/2$, și pentru n par valoarea asociată este $n/2$. Acest lucru se poate demonstra prin inducție matematică.

Problema 7

(*CEOI 2000, Cluj-Napoca, problema Sticks*)

Se consideră n ($n \leq 10$) rânduri de bețe pe o masă, cu S_i ($S_i \leq 10$) bețe aliniate pe fiecare rând și doi jucători. Bețele de pe rândul i sunt numerotate secvențial de la 1 la S_i.

Cei doi jucători mută alternativ. Fiecare mișcare constă în eliminarea a unu, două sau trei bețe de pe același rând. Bețele trebuie să fie numerotate secvențial, adică să fie consecutive.

De exemplu, un rând are 10 bețe și primul jucător elimină bețele 4, 5, 6, deci vor rămâne numai bețele 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10. Al doilea jucător poate lua la rândul său bețele 1, 2, 3, dar nu bețele 3, 7, 8 pentru că acestea nu sunt numerotate consecutiv (bineînțeles că există și alte mutări valide). Câștigă jucătorul care ia ultimul băț de pe masă.

Problema generală are o soluție ingenioasă care ține seama de paritățile rândurilor, dar la această problemă, datorită mărginirii lui S_i ($S_i \leq 10$) nu este necesar să fim ingenioși. Restricția $S_i \leq 10$, ne ajută prin faptul că numărul total de poziții (dacă jucăm pe o singură gramadă), este 2^{10}. Vom reprezenta o poziție printr-un întreg, iar dacă acel întreg are în codificarea lui binară pe poziția i un bit de 1 înseamnă că el reprezintă un rând de bețe care conține în el bățul numerotat cu i. Este ușor de realizat un graf aciclic al mișcărilor pentru un rând (graful este aciclic pentru că la fiecare mutare luăm bețe din configurație). Numerotăm fiecare poziție cu numerele *Sprague Grundy*, și acum problema deciderii dacă suntem sau nu într-o poziție câștigătoare devine banală. În problema inițială trebuia să jucăm împotriva calculatorului și să câștigăm. Putem realiza aceasta folosind mutarea câștigătoare prezentată la jocul *NIM*.

Problema 8

Această problemă a fost propusă spre rezolvare la concursul *Internet Problem Solving Contest* (cel mai prestigios concurs *online*) și o puteți găsi la adresa http://ipsc.ksp.sk/xxproblems/ipsc2003/g.php. Ea a fost folosită și la concursul organizat de *.campion* la o rundă *online*. Rezolvarea ei, complicată, folosind numerele *Sprague Grundy* prezentate în acest articol, se poate găsi în [3], pe *site*-ul [7], sau pe *site*-ul concursului *.campion*.

Problema 9

Această problemă a fost propusă spre rezolvare la ediția din acest an a *Olimpiadei Naționale de Informatică* din *Ucraina*.

Doi participanți mănâncă alternant din niște tablete de ciocolată după următoarele reguli:

- taie o tabletă în două, tăietura trebuie să fie paralelă cu una din laturile tabletei și trebuie să nu taie pătrățelele de ciocolată;
- poate să rupă și să mănânce orice linie sau coloană de pătrățele care nu se află pe marginea tabletei;
- poate să rupă și să mănânce toate patrățelele de pe marginea tabletei, cu condiția ca tableta rămasă să aibă cel puțin dimensiunea 1×1.

Nici una dintre aceste trei mutări nu poate fi efectuată asupra unei tablete de dimensiune 1×1. Pierde jucătorul care nu mai poate efectua nici o mutare.

În fișierul de intrare se va afla numărul N ($1 \leq N \leq 100$) de tablete, iar pe următoarea linie sunt N perechi de numere întregi care reprezintă dimensiunile tabletelor.

În fișierul de ieșire se va afla un singur număr întreg reprezentând numărul mutărilor câștigătoare pentru primul jucător.

Pentru această problemă vom calcula matricea $SG_{i,j}$ care reprezintă valoarea *Sprague-Grundy* asociată unei tablete de dimensiuni (i, j).

Să vedem care este recurența care va satisface elementele matricei SG:

$$\begin{array}{lll} SG_{i,j} = \text{mex}(SG_{i,k} \wedge SG_{i,j-k}, & (1 \leq k < j) & \text{mutarea întâi} \\ \quad SG_{k,j} \wedge SG_{i-k,j}, & (1 \leq k < i) & \\ \quad SG_{i,k} \wedge SG_{i,j-k-1}, & (1 \leq k < j - 1) & \text{mutarea a doua} \\ \quad SG_{k,j} \wedge SG_{i-k-1,j}, & (1 \leq k < i - 1) & \\ \quad SG_{i-2,j-2}) & (i > 2 \text{ și } j > 2) & \text{mutarea a treia} \end{array}$$

Acum, pentru a calcula numărul de mutări câștigătoare efectuăm asupra fiecărei tablete din fișierul de intrare toate mutările posibile care sunt cel mult de $4 \cdot 100 + 1$ și facem suma *XOR* a valorilor *Sprague Grundy* pentru restul tabletelor neimplicate în mutare și a tabletelor rezultate din mutare. Pentru a calcula $SG_{i,j}$ trebuie să parcurgem cel mult $2 \cdot i + 2 \cdot j + 1$ valori obținute. Astfel, algoritmul de determinare al valorilor matricei SG are ordinul de complexitatea $O(N^3)$.

Complexitatea algoritmului care determină numărul de mutări câștigătoare este $O(N^2)$.

Am văzut că aceste numere sunt folositoare pentru rezolvarea unor probleme de jocuri combinatorice. Chiar dacă numărul stărilor grafului nostru aciclic poate să fie foarte mare, putem să ne dăm seama, câteodată, din valorile mici de o regulă pe care o urmează numerele, sau măcar putem determina mai ușor configurații pentru care jocul are sau nu strategie de câștig, fapt care ne poate ajuta în descoperirea rezolvării generale.

Bibliografie

1. ***, *colecția GInfo*
2. **Mihai Oltean**, *Programarea Jocurilor Matematice*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 1996
3. **Thomas S. Ferguson**, *Game Theory Text* (*online*) http://www.math.ucla.edu/~tom/gamescourse.html
4. http://www.ams.org/new-in-math/cover/games1.html
5. http://www.cut-the-knot.com
6. http://www.mathworld.wolfram.com
7. http://ipsc.ksp.sk/

Cosmin-Silvestru Negrușeri este student în anul III la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca. El poate fi contactat prin e-mail la adresa kosmin_2000@yahoo.com.