

Fibofrac - Descrierea soluției

Autor: Prof. Cheșcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil" Buzău

Soluția 1

Generăm termenii șirului Fibonacci și formăm toate perechile posibile F_a/F_b cu $F_a < F_b$. Pentru fiecare pereche calculăm (F_a, F_b) și contorizăm pentru acele perechi care au $(F_a, F_b) = 1$. Deoarece termenii șirului Fibonacci cresc repede se obțin erori pentru $N > 80$. Soluția are ordin de complexitate $O(n^2)$ și obține aproximativ 24 puncte. Pentru obținerea unor puncte suplimentare s-ar putea lucra cu numere mari.

Soluția 2

Dacă o fracție F_a/F_b este ireductibilă atunci (F_a, F_b) este 1. Se cunoaște însă că $(F_a, F_b) = F_{(a,b)}$. Cum (F_a, F_b) trebuie să fie 1, rezultă că $F_{(a,b)}$ poate fi F_1 sau F_2 , pentru că $F_1 = 1$ și $F_2 = 1$. Așadar contorizăm toate perechile i, j cu $i < j$ pentru care (i, j) este 1 sau 2. Soluția obține aproximativ 40 puncte.

Soluția 3

În plus față de considerațiile de la varianta anterioară, se știe că numărul de perechi ordonate ($x \leq y$) care au $(x, y) = d$ și $x \leq y \leq M$ este $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(M/d)$, unde M este un număr natural iar $\varphi(t)$ reprezintă numărul de

numere mai mici decât t și prime cu t (indicatorul lui Euler).

În cazul nostru d poate fi 1 sau 2, de unde se obține expresia:

$$2 (\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(N/2)) + \varphi(N/2+1) + \varphi(N/2+2) + \dots + \varphi(N)$$

Din acest număr trebuie scăzut numărul fracțiile identice cu cele numărate anterior, deoarece au fost numărate de două ori fracțiile de tipul $1/F_a$, având în vedere că primii 2 termeni ai șirului Fibonacci sunt 1. Mai trebuie deasemenea scăzute și fracțiile $1/1$ și $2/2$ care nu sunt subunitare.

Soluția obține 100 puncte și are complexitate $O(N \log(N))$.