



Problema 2 – Spiridusi – Descriere soluție – Autor Vlad Alexandru Gavrila

30 de puncte

Pentru $N \leq 1\,000$ putem avea următoarea soluție: fixăm camera b într-unul dintre cele N noduri. Apoi, parcurgem în ordine toate nodurile de pe drumul de la b la camera 1, fixând camera a pe rând în fiecare dintre ele. Calculând pe parcurs suma coeficienților p și numărul de spiriduși goniți până la un moment dat pe drumul de la b la a , putem obține soluția în $O(N^2)$, obținând 30 de puncte.

100 de puncte

Pentru 100 de puncte, facem o parcurgere DF a arborelui începând din nodul 1, ținând o stivă `Nodes` cu nodurile întâlnite pe drumul direct de la rădăcină la nodul curent x , o altă stivă `Costs` cu suma numerelor de spiriduși ale nodurilor de la rădăcina 1 până la fiecare nod din stiva `Nodes`, și o altă stivă `Profits` cu suma coeficienților p a nodurilor de la rădăcina 1 până la fiecare nod din stiva `Nodes`. Pentru fiecare nod mai ținem următoarele dinamici:

$st[i][nod] =$ nodul aflat cu 2^i poziții mai aproape de rădăcina decât nodul nod .

$dp[i][nod] =$ valoare minimă dintre elementele stivei `Profits` aferente unui nod din stiva `Nodes` aflat cu între 1 și 2^i poziții mai sus decât nodul nod .

Recurențele acestor dinamici sunt:

$st[i][nod] = st[i-1][st[i-1][nod]]$.

$dp[i][nod] = \min(dp[i-1][nod], dp[i-1][st[i-1][nod]])$.

Acum, va trebui să facem următoarele observații.

1. Pentru două noduri a și b aflate pe pozițiile x , respectiv y în stiva `Nodes`, suma numerelor de spiriduși aflați pe drumul de la camera a la camera b este $Costs[y] - Costs[x-1]$.
2. Deoarece numărul de spiriduși dintr-o cameră este pozitiv, pentru o cameră b fixată, numărul de spiriduși aflați pe lanțul de la o cameră a la camera b crește pe măsură ce fixăm camera a mai departe de b .
3. Pentru două noduri a și b aflate pe pozițiile x , respectiv y în stiva `Nodes`, suma coeficienților p ai camerelor aflate pe drumul de la camera a la camera b este $Profits[y] - Profits[x-1]$.

Acum fixăm camera b în nodul curent nod , care să presupunem că se află în stiva `Nodes` la poziția $pozB$. Din cele două observații ne vine ideea să căutăm binar cea mai mică poziție $pozMinA$ pentru care putem fixa camera a în `Nodes[pozMinA]` încât să nu avem mai mult de C spiriduși pe lanțul de la camera a la camera b , calculând costul așa cum am dedus în observația 1.

Acum ne rămâne doar să aflăm care este poziția $pozA$ în care trebuie fixată camera a pentru a obține profitul maxim. Această poziție este, conform observațiilor 2 și 3, cea pentru care $Profits[pozA-1]$ este minimă. Putem afla această valoare cu ajutorul dinamicii dp , ca fiind $\min(dp[1][b], dp[1][Nodes[pozMinA + 2^1 - 1]])$ – unde 1 este cel mai mare număr pentru care 2^1 este mai mic decât $pozB - pozMinA + 1$.

Această soluție are complexitate $O(N \log N)$ și obține 100 de puncte.