

Nebuni – Descrierea soluției

Prof. Emanuela Cerchez, Colegiul Național "Emil Racoviță" Iași

Există $2N-1$ diagonale paralele cu diagonală principală și $2N-1$ diagonale paralele cu diagonală secundară.

Vom utiliza doi vectori DP și DS de lungime $2N-1$, cu componente din mulțimea $\{0, 1\}$.

$DP[i]=1$ dacă a i-a diagonală paralelă cu diagonală principală este atacată de un nebun și 0 în caz contrar.

$DS[i]=1$ dacă a i-a diagonală paralelă cu diagonală secundară este atacată de un nebun și 0 în caz contrar.

Diagonalele paralele cu diagonală principală sunt numerotate ca în figura următoare, astfel:

- diagonalele paralele cu diagonală principală situate deasupra diagonalei sunt numerotate de la dreapta la stânga de la 1 la N (adică diagonală i începe pe linia 1 și coloana $N-i+1$);
- diagonalele paralele cu diagonală principală situate dedesubt sunt numerotate de la $N+1$ la $2N-1$ începând de sus în jos (adică diagonală i începe pe linia $i-N+1$ și coloana 1).

	7	6	5	4	3	2	1
7	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7
8	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6	2, 7
9	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6	3, 7
10	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6	4, 7
11	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6	5, 7
12	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6	6, 7
13	7, 1	7, 2	7, 3	7, 4	7, 5	7, 6	7, 7

Să considerăm un nebun situat pe linia x și coloana y .

Atunci numărul diagonalei paralele cu diagonală principală pe care se află acest nebun este $x-y+N$

Diagonalele paralele cu diagonală secundară sunt numerotate ca în figura următoare, astfel:

- diagonalele paralele cu diagonală secundară situate deasupra diagonalei sunt numerotate de la dreapta la stânga de la 1 la N (adică diagonală i începe pe linia 1 și coloana $N-i+1$);
- diagonalele paralele cu diagonală secundară situate dedesubt sunt numerotate de la $N+1$ la $2N-1$ începând de sus în jos (adică diagonală i începe pe linia $i-N+1$ și coloana 1).

Vom numerota diagonalele paralele cu diagonală secundară astfel:

- diagonalele paralele cu diagonală secundară situate deasupra diagonalei sunt numerotate de la stânga la dreapta de la 1 la N (adică diagonală i va începe pe linia 1 și coloana i);
- diagonalele paralele cu diagonală secundară situate dedesubt sunt numerotate de la $N+1$ la $2N-1$ începând de sus în jos (adică diagonală i începe pe linia $i+1-N$ și coloana N)

1	2	3	4	5	6	7	
1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	7
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6	2, 7	8
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6	3, 7	9
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6	4, 7	10
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6	5, 7	11
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6	6, 7	12
7, 1	7, 2	7, 3	7, 4	7, 5	7, 6	7, 7	13

Să considerăm un nebun situat pe linia x și coloana y .

Atunci numărul diagonalei paralele cu diagonala secundară pe care se află acest nebun este $x+y-1$

Chiar de la citire putem construi vectorii DP și DS , marcând astfel diagonalele atacate de nebuni.

Să notăm cu SDP numărul total de elemente aflate pe diagonale paralele cu diagonala principală, atacate de nebuni

Pentru a calcula SDP vom parcurge toate diagonalele principale de la 1 la $2N-1$ și dacă diagonală este atacată ($DP[i]=1$) vom aduna la SDP numărul de elemente de pe diagonala respectivă.

Numărul de elemente de pe diagonala paralelă cu diagonala principală i este i (dacă $1 \leq i \leq N$), respectiv $2N-i$, (dacă $N+1 \leq i \leq 2N$).

În mod similar, calculăm SDS , numărul total de elemente aflate pe diagonale paralele cu diagonala secundară, atacate de nebuni.

Numărul de elemente atacate de nebuni nu este $SDP+SDS$ deoarece este am numărat de două ori elementele situate la intersecția diagonalelor.

Deci va trebui să calculăm SI =numărul de elemente situate la intersecția dintre o diagonală paralelă cu diagonala principală și o diagonală paralelă cu diagonala secundară, ambele atacate de câte un nebun.

O soluție ar fi să considerăm toate perechile de diagonale de acest timp și să le contorizăm (analizând astfel $(2N-1)*(2N-1)$ perechi de diagonale). Această abordare va obține 70 de puncte.

O soluție mai eficientă ar fi să utilizăm niște sume parțiale.

Să notăm cu $nrs[i]$ =numărul de diagonale paralele cu diagonala secundară atacate de nebuni, aflate deasupra diagonalei i , inclusiv diagonala i , având lungimea de aceeași paritate cu diagonala i .

$nrs[0]=0$; $nrs[1]=1$, dacă $DS[1]=1$ și 0 în caz contrar.

$nrs[i]=nrs[i-2]+1$, dacă $DS[i]=1$ sau $nrs[i-2]$ dacă $DS[i]=0$;

Parcurgem toate diagonalele paralele cu diagonala principală și pentru fiecare astfel de diagonală, dacă este atacată de un nebun (adică $DP[i]=1$) determinăm câte diagonale paralele cu diagonala secundară intersectează această diagonală.

Pentru aceasta, determinăm extremitățile diagonalei i , astfel:

Dacă $1 \leq i \leq N$ atunci $LInceput=1$; $CInceput = N-i+1$; $LSfarsit=i$; $CSfarsit = N$

Dacă $N < i < 2N$ atunci $LInceput=i-N+1$; $CInceput = 1$; $LSfarsit=N$; $CSfarsit = 2N-i$;

Diagonala paralelă cu diagonala secundară pe care se află sfârșitul diagonalei i este $Sf=LSfarsit+CSfarsit-1$

Diagonala paralelă cu diagonala secundară pe care se află începutul diagonalei i este $Inc=LInceput+CInceput-1$.

Diagonala principală i va intersecta $nrs[Sf]-nrs[Inc-2]$ diagonale secundare.

Soluția 2. (pentru 50 de puncte).

Utilizăm o matrice cu N linii și N coloane, cu elemente 0 și 1. În aceasta matrice marcăm cu 1 elementele atacate de cel puțin un nebun. Rezultatul se obține contorizând elementele egale cu 1 din matrice.