Problema 1 Gălеți (Prof Adrian Panaete – Colegiul National „A. T. Laurian” Botosani)

Descrierea solutiei

Vom demonstra prin inducție că efortul depus pentru a vărsa toată apa în prima găleată din cele n este o valoare E_n cu proprietatea că $n-1 \leq E_n \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Fie e_i efortul depus când vărsăm găleata cu numărul i. În momentul vărsării găleata coține cel puțin apa conținută inițial (1 litru) și cel mult toata apa conținută în toate galețile de la găleata i la găleata n ($n-i+1$ litri) .

$$1 \leq e_i \leq n-i+1$$

Obținem

$$E_n = e_2 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n \leq (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Să demonstrăm în continuare că pentru orice valoare E_n cu proprietatea că $n-1 \leq E_n \leq \frac{n(n-1)}{2}$ există cel puțin o soluție.

Pentru $n=1$ efortul depus este $E_1 = 0$ dar $1-1 \leq 0 \leq \frac{1(1-1)}{2}$.

Pentru $n=2$ efortul depus este $E_2 = 1$ dar $2-1 \leq 1 \leq \frac{2(2-1)}{2}$.

Să presupunem că pentru $n-1$ găleți știm deja că putem vărsa toată apa în prima găleată cu orice efort E_{n-1} cu proprietatea că $n-2 \leq E_{n-1} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Pentru n găleți considerăm două cazuri particulare:

Cazul 1.

Vărsăm primele $n-1$ găleți în prima și la final vărsăm ultima găleată în prima.

Efortul depus la ultima vărsare este 1 și pentru celelalte este E_{n-1} și astfel putem vărsa toată apa în prima găleată pentru

$$n-1 = n-2+1 \leq E_n \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

Cazul 2.

Vărsăm ultimele $n-1$ în a doua și la final vărsăm a doua găleată în prima găleată pentru

$$2n-3 = n-2+n-1 \leq E_n \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pentru a arăta că în cele două cazuri acoperim toate valorile posibile ale lui E_n între $n-1$ și $\frac{n(n-1)}{2}$ este sufficient să dovedim că valoarea minimă din al doilea caz nu poate depăși valoarea maximă din primul caz cu mai mult de o unitate adică

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \geq 2n-3-1$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $(n-3)(n-4) \geq 0$ și este evident adevărată pentru orice valoare întreagă n.

Demostrația de până aici ne sugerează si o metodă prin care se poate realize succesiunea de vărsări construind această succcesiune Reluăm raționamentul pe oricare interval de gălețí $[st, dr]$ conținând $m = dr - st + 1$ gălețí. Ne propunem să aducem toată apa în st cu un efort cunoscut ef.

Dacă $ef \geq 2\mathrm{m} - 3$ atunci procedăm ca în cazul 2. Mai precis efectuăm toate operațiile de vărsare care aduc apa din intervalul $[st + 1, dr]$ în $st + 1$ cu efortul $ef - m + 1$ după care efectuăm vărsarea din $st + 1$ în st cu efortul $m - 1$

În caz contrar prcedăm ca în cazul 1 și mutăm toată apa din intervalul $[st, dr - 1]$ îm st cu efort $ef - 1$ după care vărsăm dr în st cu efort 1.

Implementarea se poate face în două moduri:

Recursiv: implementăm o functie cu parametrii st, dr, ef care va fi apelată recursiv în funcție de valoarea lui ef fie cu valorile $st + 1, dr, ef - m + 1$ fie cu valorile $st, dr - 1, ef - 1$. La revenire se afișeaza $st + 1$ st în cazul primului apel respectiv dr st în cazul celuilalt.

Iterativ: În loc să implementăm funcția recursivă simulăm stiva de apeluri memorând vărsările în ordine inversa și trecând de la un pas la altul prin modificarea a 3 variabile st, dr și ef care au inițial valorile $st = 1, dr = n, ef = e$ si rulam o instrucțiune repetitivă pâna când $dr = st$ sau echivalent $ef = 0$.

Algoritmul este liniar în ambele cazuri atât ca timp de executare cât și ca memorie utilizată

Notă:

Structuri de date utilizate :

In cazul implementării recursive nu se utilizeaza structuri de date.

In cazul implemetării iterative este necesară implementarea stivei care conține răspunsurile. Pentru aceasta se pot utiliza doi vectori standard iar ca alternativă se pot utiliza structuri specializate din STL (vector<pair<int,int>> stack<pair<int,int>>)

Tipul problemei

Ad-hoc, algoritm constructiv, greedy

In funcție de rezolvarea abordată – recursivitate, two-pointers structuri de date(stiva)

Gradul de dificultate: 2