Problema 3 aquapark **100 de puncte**

Autori: Szabo Zoltan - ISJ Mures Tg Mures
Budau Adrian – Universitatea Bucuresti

Solutie pentru 75 de puncte

Iniţial să considerăm, că toate muchiile sunt desenate în interior.
Vor exista perechi de muchii care se intersectează iar alte perechi nu.

Două muchii (x,y) respectiv (u,v), cu x<y şi u<v, se intersectează dacă şi numai dacă:

- x < u < y < v sau
- u < x < v < y.

Dacă două muchii interioare se intersectează, una dintre ele trebuie să devină exterioară.
În acest fel unel muchii vor fi condiţionate de alte muchii. Putem construi un graf bipartit din muchiile grafului.

Pornind de la o muchie, cu ajutorul unei cozi putem eticheta fiecare muchie. Prima va fi etichetată cu 1, toate cele care se intersectează cu aceasta vor fi etichetate cu 2, cu ajutorul unei cozi vom eticheta toate muchiile care se intersectează cu o muchie deja etichetată. Enunţul problemei ne garantează că de fiecare dată muchiile nou etichetate nu vor intra în conflict cu muchii deja etichetate.

Numărul proiectelor disctincte este egal cu 2 la puterea numărului de componente conexe ale grafului bipartit.

Această rezolvare are complexitate O(m^2)

Solutie pentru 100 de puncte

Solutie de **100** de puncte se bazeaza pe aceleasi observatii ca si cea de **75** de puncte, anume ca este nevoie de acea constructive a acelui graf bipartite. Ce este necesar de observat este ca acest graf bipartit area prea multe muchii, multe din ele nenecesare.

De exemplu daca avem in acest graf bipartit 2 vârfuri deoparte şi 2 de alta parte, atunci nu sunt necesare niciodata toate cele 4 muchii, sunt suficiente oricare 3.

Se poate folosi o baleiere pe baza evenimentelor de forma

- La pozitia x apare o muchie (x, y)
- La pozitia y dispare o muchie (x, y)

La orice moment se mentin muchiile care au aparut si nu au disparut insa, si deci cand dispare o muchie (x, y) se poate itera prin aceasta lista de muchii de la cea mai recent aparuta spre cea mai putin recenta.

Orice muchie de forma (z, t) care a aparut dar nu a disparut inca are cu siguranta t > y, deci daca z > x atunci aceste doua muchii se intersecteaza daca sunt amandoua in interior sau in exterior (deci se poate trage o muchie in graful bipartit).

Implementarea directa a acestei idei functioneaza in complexitate O(numarul de intersectii ale muchiilor), si nu este inca suficient de rapid, insa o mica observatie va reduce complexitatea la O(M log M).
Daca atunci cand dispare mucia (x, y), se descopera ca ea se intersecteaza cu muchiile (z_1, t_1) (z_2, t_2), .. (z_k, t_k) cu $z_1 \le z_2 \le ... \le z_k$ atunci $t_k \le t_{k-1} \le ... \le t_2 \le t_1$ altfel nu ar exista solutie. Deci orice alta muchie ar mai disparea ulterior (x’, y’) (evident y’>= y) si care se intersecteaza cu un (z_i, t_i) se intersecteaza si cu (z_1, t_1). Dar se stie deja in graful bipartit ca (z_1, t_1) si (z_i, t_i) sunt de aceeasi parte, deci nu mai merita considerata muchia (z_i, t_i) daca $i \ge 2$. Astfel putem elimina toate muchiile (z_i, t_i) cu $i \ge 2$ atunci cand procesam muchia (x, y).

Aceste muchii (z, t) pot fi tinut intr-o stiva, operatiile reducandu-se la eliminarea unor elemente din varful stivei. Cum entru orice eveniment in care apare o muchie (x, y) doar se adauga in capul stivei muchia, iar un element poate fi sters din stiva cel mult o data inseamna ca dupa sortarea evenimentelor (pentru a se putea folosi baleierea) complexiatea este O(M).
Din cauza sortarii complexitatea finala devine O(M log M).