

Numinum - Descrierea soluției

*Autor: prof. Ciprian Cheșcă
Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil" Buzău*

Soluția 1

$O(\max(a1,b1)/\min(a1,b1) + \max(a2,b2)/\min(a2,b2))$

Pentru fiecare dintre cele două fracții se determină o secvență de 1 și 0 obținută prin aplicarea algoritmului lui Euclid prin **scăderi** repetate între numărător și numitor.

Spre exemplu, pentru fracția $3/4$ se efectuează operațiile $3/4 \rightarrow 3/1 \rightarrow 2/1 \rightarrow 1/1$ și se va obține secvența **011**.

Se determină, de la dreapta la stânga, subsecvența comună celor două secvențe determinate anterior și se calculează suma numărului de cifre din subsecvențele necomune.

Soluția are dezavantajul că necesită multă memorie, având în vedere că arborele poate avea **10^9** nivele.

Gestionând atent memoria disponibilă, se pot obține aproximativ 40 puncte.

Soluția 2

$O(\log(\min(a1,b1)) + \log(\min(a2,b2)))$

Pentru a avea un model vizual asociat acestei soluții se completează pentru început structura cu fracția $0/1$ așezată deasupra fracției $1/1$ și se consideră că se ajunge de la fracția $0/1$ la fracția $1/1$ plecând către dreapta.

Se aplică algoritmul lui Euclid prin **împărțiri** repetate și se construiește o secvență de numere formate din câturile obținute la fiecare pas al aplicării algoritmului Euclid¹.

¹ În matematică o astfel de secvență poartă denumirea de fracție continuă

Semnificația unei astfel de secvențe este următoarea: citită de la sfârșit către început secvența arată drumul (și lungimea) spre o anumită fracție. De exemplu pentru fracția $5/3$ se obține secvența $[1,1,2]$ care arată că se pornește din $0/1$, se parcurg două segmente către dreapta apoi unul către stânga și apoi unul către dreapta și ajungem la fracția $5/3$.

Dacă se trasează o axă de simetrie (virtual) prin fracția $1/1$ și se împarte structura în două zone similare dar în care fracțiile sunt răsturnate, se poate observa că toate fracțiile din stânga vor avea în secvență un număr par de termeni, iar cele din dreapta un număr impar de termeni.

În cazul în care o secvență conține un număr par de termeni se va adăuga un termen de 1 la sfârșitul secvenței și se va decrementa ultimul termen. Această operație nu modifică lungimea drumului dar permite realizarea unei diferențe între drumurile ce pleacă din $0/1$ în $1/1$ și apoi merg către dreapta structurii, față de cele care pleacă din $0/1$ în $1/1$ și apoi merg către stânga structurii.

Ca și în soluția anterioară se determină apoi subsecvența comună a secvențelor obținute pentru cele două fracții și se calculează suma elementelor din subsecvențele necomune.

Spre exemplu pentru fracțiile $2/5$ și $5/3$ secvențele asociate sunt: $[0,2,2]$ și respectiv $[1,1,2]$. Analizate de la dreapta la stânga se observă că cele două secvențe au în comun 2 și apoi încă un element. Suma elementelor din subsecvențele necomune este $0 + 1$ (din prima fracție) și 1 (din a doua fracție), deci în total 2. Această soluție obține 100 puncte.

Soluție

*student Daniel Posdărăscu
Universitatea București*

Observăm că pentru orice pereche (a,b) , părintele acestei perechi este o pereche (c,d) , pereche care se determină în urma aplicării algoritmului de cel mai mic divizor comun prin scăderi repetate. O soluție naivă în $O(N)$ (în $O(\text{rezultat})$ mai exact) presupune ca la fiecare moment să selectăm perechea cu una din cele 2 valori maxime și aplicarea scăderii acelei perechi.

De exemplu:

Dacă avem 2 perechi: $(2, 17)$ și $(13, 25)$

Pasul 1: 25 este valoarea maximă deci scădem 13 din 25. Perechea devine $(13,12)$.

Pasul 2: 17 este valoarea maximă deci scădem 2 din 17. Perechea devine $(2,15)$

etc.

În momentul în care perechile devin egale, ne oprim.

După cum bine știm, o optimizare a algoritmului de cmmdc prin scăderi repetate este algoritmul lui Euclid prin împărțiri care face $O(\log)$ pași.

Din păcate, în cazul acestei probleme, aplicarea algoritmului lui Euclid poate să sară peste "punctul de întâlnire" a celor 2 perechi. Ce putem deduce în schimb este faptul că dacă am determina prima pereche din cele comune celor 2 perechi, aceasta pereche ar fi o pereche care se poate determina "în mod direct" din punctul de întâlnire. Definim că dintr-o pereche (a,b) putem ajunge "în mod direct" în altă pereche (c,d) dacă putem aplica algoritmul de scăderi repetate doar pentru una din variabile (ori $a = c$ și modificăm doar b , ori $b = d$ și modificăm doar a).

Astfel, pornind de la 2 perechi (a,b) și (c,d) , am redus problema la alte 2 perechi (a_2, b_2) și (c_2, d_2) , perechi

care se pot întâlni "în mod direct" într-un punct comun. Din acest punct, putem determina în $O(1)$ distanța dintre cele 2 perechi aplicând formule simple în funcție de cazuri. Exemplu de caz:

$A2 < B2, C2 > D2$ - din acest caz deducem că prin scăderi repetate $A2$ rămâne pe loc în timp ce $B2$ scade cu câte $A2$, respectiv $D2$ rămâne pe loc și $C2$ scade cu câte $D2$.

Din moment ce știm că aceste perechi se vor întâlni într-un punct comun avem relațiile:

- $B2 - k1 * A2 = D2$
- $C2 - k2 * D2 = A2$

Din aceste 2 relații putem determina $k1$ (distanța primei perechi până în punctul comun) respectiv $k2$ (distanța celei de a doua perechi până în punctul comun. Distanța între cele 2 perechi este desigur $k1 + k2$.

Restul cazurilor rămâne tema de gândire!

Soluție

*prof. Marcel Drăgan
Colegiul Național "Samuel Von Brukenthal", Sibiu*

Pentru complexitate liniară folosim scăderi repetate asupra ambelor fracții parcurgând astfel structura înapoi spre vârf. La fiecare pas transformăm fracția în componenta careia intră valoarea numerică mai mare (la numărător sau numitor) și numărăm pașii realizați.

Ne oprim atunci când cele două fracții devin identice.

Pentru complexitate logaritmică folosim în loc de scăderi repetate restul împărțirii (la fel ca în Algoritmul lui Euclid). La această modalitate trebuie să avem grijă la situația în care transformarea fracției trece dincolo de prima fracție comună celor două șiruri de transformări neobținând astfel numărul minim de segmente. Pentru aceasta la fiecare pas verificăm dacă fracțiile nu au ajuns cumva pe aceeași ramură: $p1==p2$ și $(q1-q2)\%p1==0$ sau $q1==q2$ și $(p1-p2)\%q1==0$. Dacă au ajuns calculăm numărul de segmente dintre cele două fracții: $(p1-p2)/q1$ sau $(q1-q2)/p1$ și ajustăm numărul total de segmente.