Problema Poligon

Andrei-Costin Constantinescu, Oxford University
Bogdan Ciobanu, Universitatea Bucuresti

60 puncte - O(N^3)

Notam cu **v[1], v[2], ..., v[N]** cele **N** varfuri ale poligonului, in ordinea in care au fost date.
Se calculeaza programare dinamica **dp[i][j]** = costul minim pentru a comprima subsecventa de varfuri luate in ordine trigonometrica, incapand cu varful **i** si terminand cu varful **j**, astfel incat varfurile **i** si **j** sa fie nemiscate. Putem scrie recurenta **dp[i][j]** = minim dupa **k** din **dp[i][k] + dp[k][j] + min(dist(v[i], v[k]), dist(v[k], v[j])) pentru i < k < j**. Mai avem ca **dp[i][i + 1] = 0**, iar raspunsul este **min dupa i != j din dp[i][j] + dp[j][i] + dist(v[i], v[j])**.

100 puncte - O(N^2)

Construim un graf neorientat complet cu **N** noduri astfel incat fiecare varf al poligonului sa reprezinte un nod in graf, iar costul muchiei de la nodul **A** la nodul **B** sa fie dat de distanta euclidiana dintre varul **A** si varful **B**. Analizand cu atentie modul in care poligonul nostru evolueaza in poligoane mai mici, deducem urmatoarele:

- Toate costurile mutarilor efectuate pe parcursul unei secvente sunt costuri de muchii din graf.
- Nu vom muta niciodata un punct de 2 ori, deci multimea muchiilor asociate diagonalelor corespunzatoare mutarilor efectuate intr-o secventa fixata descrie un arbore partial al grafului.
- Asadar, cum toate secventele de mutari descriu un arbore partial in graf, costul minim nu poate fi mai mic decat costul **Arborelui Partial de Cost Minim (APM)** al grafului;

Acum, observatia cheie este ca intotdeauna va exista o succesiunde de **N - 1** mutari ce descrie exact APM-ul grafului dat. Aceasta observatie nu este intocmai una triviala, asa ca o vom demonstra printr-o serie de leme:

<u>Lema 1</u> Muchiile APM-ului grafului nu se intersecteaza unele cu celelalte in alte puncte decat, eventual, varfurile acestora.

<u>Demonstratie</u> Presupunem prin absrud ca 2 muchii **AB** si **CD** din APM se intersecteaza. Atunci, in cazul de fata, schimband aceste 2 muchii fie cu **AC** si **BD**, fie cu **AD** si **BC**, in functie de restul muchiilor APM-ului, am obtine un arbore partial de cost mai mic, contrazicand minimalitatea arborelui de la care am plecat. Detaliile sunt lasate ca tema cititorului.

<u>Lema 2</u> Pentru orice APM al grafului considerat, exista cel putin 2 laturi ale poligonului cu proprietatea ca:

1. Muchiile asociate lor fac parte din APM.
2. Pentru fiecare dintre ele, nodul asociat cel putin unuia dintre varfuri este o frunza in APM.

<u>Demonstratie</u> Prin inductie, luand in considerare 2 cazuri:

1. APM-ul este un lant, caz in care toate muchiile au asociate laturi ale poligonului, dintre care 2 respecta si conditia de a avea unul din capete frunza in arbore.
2. Exista cel putin o muchie a APM-ul care nu are asociata o latura a poligonului (sa ii numim diagonala asociata diagonala speciala). In acest caz, aplicand ipoteza de inductie pe cele 2 poligoane formate prin taierea poligonului nostru cu diagonala speciala, putem deduce ca exista cel putin 2 muchii cu proprietatile date in poligonul initial.

<u>Teorema 3</u> Exista o succesiune de mutari care reduc un poligon la un singur punct cu cost asociat exact costul APM-ului grafului asociat.

<u>Demonstratie</u> Inductiv, se alege una dintre cele 2 muchii generate de <u>Lema 2</u>, se reduce poligonul astfel incat varful asociat nodului frunza sa dispara, si se foloseste ipoteza de inductie pe poligonul astfel rezultat.

Nota: Procedeul prezentat, de a construi APM-ul si de a tot muta frunze ce au asociate laturi ale poligonului in tatal lor reprezeinta exact metoda de constructie a solutiei.

Pentru implementare se va folosi Algoritmul lui Prim, care implementat fara cozi de prioritati ruleaza in $O(n^2)$ in graf dens.