

## **Solutie Dungeon:**

**Stud. Eugenie Daniel Posdarascu – Universitatea din Bucuresti**

Se observa ca pentru  $N$  impar nu exista solutie.

Sa presupunem urmatorul algoritm de determinare a unui astfel de ciclu:

- Determinam un cuplaj in primul arbore: o impartire a arborelui in  $N / 2$  perechi de noduri astfel incat pentru fiecare pereche  $(A, B)$  sa existe muchia de la  $A$  la  $B$  in arbore.
- Determinam un cuplaj in cel de al doilea arbore.
- Consideram graful format din cele  $N$  muchii rosii, cele  $N / 2$  muchii albe determinate de cele  $N / 2$  perechi din primul cuplaj, respectiv cele  $N / 2$  muchii negre determinate de cele  $N / 2$  perechi din cel de al doilea cuplaj.
- Verificam daca acest graf chiar este solutie sau nu (daca formeaza ciclu sau nu).

### **Observatia 1:**

Cum determinam un cuplaj intr-un arbore? Pornim o parcurgere DFS din radacina. Pentru fiecare nod  $X$  din DFS avem 3 cazuri:

- Toti fii acestuia sunt cuplati  $\Rightarrow$  transmitem in parinte ca  $X$  este necuplat
- Un singur fiu e necuplat  $\Rightarrow$  il cuplam pe acesta cu  $X$  si transmitem ca  $X$  este cuplat
- Mai multii fii sunt necuplati  $\Rightarrow$  nu exista solutie

Algoritmul incearca sa cupleze fiecare frunza cu parintele acesteia. Astfel, se poate deduce ca daca exista solutie, aceasta este unica.

### **Observatia 2:**

De ce solutia este unica la aceasta problema (aceasta fiind ciclul definit mai sus)? Se observa faptul ca fiecare muchie rosie trebuie folosita, iar pentru fiecare nod  $X$  din cele  $2 * N$ , acesta va fi conectat in ciclu prin exact o muchie de arbore (alba sau neagra). Aceasta muchie poate fie sa porneasca din  $X$  intr-un vecin  $Y$  din acelasi arbore (si din  $Y$  merge pe o muchie rosie), fie se vina dintr-un vecin  $Y$  din acelasi arbore si din  $X$  porneste in celalalt arbore. Astfel, deducem pentru fiecare arbore ca nodurile trebuie impartite in  $N / 2$  astfel de perechi, indiferent de sensul in care sunt parcurse. Acesta impartire este data de cele 2 cuplaje mentionate mai sus. Din moment ce aceste cuplaje au solutie unica rezulta ca si ciclul este unic.

### **Observatia 3:**

Desi am determinat muchiile grafului, nu este garantat ca acesta formeaza un ciclu (conteaza muchiile rosii). Este posibil ca graful sa fie impartit in mai multi ciclii. Ca urmare, graful obtinut este doar o posibila solutie ce trebuie verificata la final.

**Complexitate:**  $O(N)$  pentru fiecare test