

**Autor problema: Tamio-Vesa Nakajima**

**Solutie in  $O(N^2)$  – 100 puncte – Tamio-Vesa Nakajima**

Stabilim ca 1 este radacina arborelui.

Se rezolva problema cu ajutorul programarii dinamice. Mai intai, fie:

$nrfrunze[i]$  = numarul de frunze al subarborelui cu radacina la i

Folosim urmatoarea matrice:

$d[i][j]$  = numarul maxim de perechi de noduri in frate, considerand doar subarboarele cu radacina la i, si fixand ca sunt exact j noduri albe x la care se poate ajunge de la i trecand doar prin x si posibil cateva noduri negre.

Pentru a calcula dinamica pentru un nod oarecare i, ai carui fii sunt  $f[1] \dots f[nrfrunze[i]]$ , vom considera o a doua dinamica:

$d2[j][k]$  = numarul maxim de perechi de noduri in frate, considerand doar subarboarele cu radacina la i si primii j fii ai sai, fixand ca sunt exact k noduri albe x la care se poate ajunge de la i trecand doar prin x si posibil cateva noduri negre, si fixand ca i este colorat in negru.

Recurenta acestei dinamici este:

$$d2[j+1][k] = \max(d2[j][k-l] + d[f[j+1]][l] + (k-l) * l) \text{ pentru } 0 \leq l \leq nrfrunze[f[j+1]]$$

In aceasta recurenta, l reprezinta numarul de noduri albe x la care se poate ajunge de la  $f[j+1]$  trecand doar prin x si posibil cateva noduri negre ce apar in subarboarele lui  $f[j+1]$ .

Mai calculam un sir:

$best\_daca\_tata\_alb[i]$  = numarul maxim de perechi in frate in subarboarele care contin tatal lui i si subarboarele cu radacina in i daca fixam ca tatal lui i este alb

Astfel:

$$best\_daca\_tata\_alb[i] = \max(d[i][j] + j) \text{ pentru } 1 \leq j \leq nrfrunze[i]$$

In aceasta formula, j reprezinta numarul de noduri albe x la care se poate ajunge de la i trecand doar prin x si posibil cateva noduri negre ce apar in subarboarele lui i.

Calculand acestea, cum nodul i este fie alb, fie negru, putem calcula d astfel:

$$d[i][1] = \max(d2[nrfrunze[i]][1], best\_daca\_tata\_alb[f[1]] + \dots + best\_daca\_tata\_alb[f[nrfrunze[i]]])$$
$$d[i][j] = d2[nrfrunze[i]][j] \text{ pentru } 1 < j \leq nrfrunze[i]$$

Solutia problemei se afla in:

$$\max(d[1][1], d[1][2], \dots, d[1][nrfrunze[1]])$$

Cu ajutorul inductiei se poate demonstra ca aceasta solutie foloseste cel mult  $O(N^2)$  operatii. Un alt mod de a demonstra se bazeaza pe faptul ca numarul de operatii efectuate de aceasta

solutie este egal cu numarul de perechi neorientate de noduri, numarate in functie de locul unde pica cel mai adanc stramos comun al lor.