Descrierea soluției - 100m

autor prof. Cheşcă Ciprian
Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil" Buzău

Varianta 1

Făra egalități între atleți răspunsul este n!

Fie H_n răspunsul corespunzător cazului în care putem avea egalități.

Avem $H_1 = 1$ si $H_2 = 3$.

Să analizăm modul de calcul al lui H_3.

Rezultatele pot fi de forma 3, 2 + 1 , 1 + 1 + 1.

Acestea sunt toate partițiile numărului 3.

Primul element înseamnă că cei 3 atleți ajung simultan, 2 + 1 înseamnă ca doi atleți ajung simultan iar al treilea înainte sau dupa cei doi și 1 + 1 + 1 înseamnă că toți atleții ajung la momente diferite.

- Grupul de 3 poate ajunge într-o singură modalitate.
- Grupurile de 2 din 2 + 1 pot ajunge în două moduri iar atletul singur poate fi ales în 3 moduri.
- Grupul 1 + 1 +1 poate fi ales în 3! moduri

Așadar conform regulii sumă – produs avem: $H_3 = 1 + 2 \times 3 + 3! = 13$

Pentru a calcula H_4 considerăm toate partițiile numărului 4 și studiem ordinea diferitelor grupuri. Obținem $H_4 = 1 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 6 \times 3! + 4! = 75$

Generalizând, dacă vom nota $H_0 = 1$, găsim următoarea relație de recurență :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^{\,k} \cdot H_{n-k} \qquad (1)$$

Varianta 2

Fie S(n,k) numărul de partiții ale unei mulțimi cu n elemente în grupuri de k submulțimi. S(n,k) este cunoscut ca numărul lui Stirling de speța a II-a.

Se poate demonstra că $H_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot k!$ (2)

O relație de recurență pentru S(n,k) este S(n+1,k) = S(n,k-1) + k · S(n,k),
cu S(n,1) = S(n,n,) = 1 și este asemănătoare cu relația de recurență a combinărilor.

Rezolvarea implementează relațiile de recurență (1) sau (2), cu mențiunea că trebuie gestionat atent modul de utilizare al memoriei deoarece limitele de memorie vor impune utilizarea a 2 vectori în locul unei matrice.

Varianta 3

Se determină o formulă recursivă de calcul de genul:

fie f(N,K) numărul de așezări a N concurenți pe k nivele
f(N,1)=1 //evident
f(N,N)=N! //evident
f(N,k)=k*f(N-1,k)+k*f(N-1,k-1)

Explicație: orice final pentru N concurenți pe k nivele se obține
a) dintr-o așezare a N-1 concurenți pe K nivele și punând pe concurentul N pe oricare din cele k nivele
sau
b) dintr-o așezare pe k-1 nivele a N-1 candidați și un nivel suplimentar (al k-lea) pe care se află doar concurentul N, iar aici avem k posibilități pentru poziția acestui nivel suplimentar printre cele k-1 nivele existente
La final numărul căutat este

$s = f(N,1)+f(N,2)+...+f(N,N)$

Apare dificultatea lucrului cu 2 vectori sau cu ultimele 2 linii ale matricei pentru încadrare în memorie.